

Luding 接線モデル（粘着・動静摩擦遷移）の数式解説 (tangential_model_luding_tn.h)

Open DEM Japan

2025年6月29日

本モデルは Luding [?] に基づき、

1. 静摩擦係数 μ_S と動摩擦係数 μ_D の両方を持つ動静遷移、
2. 接線ばね剛性 k_t を法線ばね k_n に比例させる調整因子 κ_t 、
3. 粘着ばね k_c による付着力 f_{adh} の影響、
4. 粘性減衰係数 γ_t を材料依存にスケールする機能

を組み込む。以下ではコード中の演算を数学的に定式化する。

■0. 定義と前処理 接触法線単位ベクトル \hat{n} 、相対接線速度 v_{tr} 、履歴剪断変位 ξ 、法線重なり δ_n とする。
入力パラメータ

$$\mu_S, \quad \mu_D = \mu_S \mu_r, \quad k_t = \kappa_t k_n, \quad \gamma_t = \gamma_{t0} \gamma_r,$$

ただし μ_r は `coeffMu`, κ_t は `kT2kcMax`, γ_r は `coeffFricVisc` に対応する行列値である。

付着ばね剛性 k_c と付着力履歴 f_{adh} は法線モデル側で更新され、接線計算では

$$F_n^* = F_n + k_c \delta_n - f_{adh} \quad (1)$$

という有効法線荷重として用いられる。

■1. 剪断変位の時間積分

$$\xi(t + \Delta t) = \xi(t) + v_{tr} \Delta t, \quad (2)$$

$$\xi \leftarrow \xi - (\xi \cdot \hat{n}) \hat{n}, \quad (3)$$

により常に接触平面内へ射影される。剪断量

$$\xi = \|\xi\|. \quad (4)$$

■2. 接線ばね力

$$F_t^{\text{spring}} = -k_t \xi, \quad (5)$$

ここで $k_t = \kappa_t k_n$ の比例剛性であり、 k_n は法線ばね定数。

■3. 動静摩擦遷移判定 ばね力大きさ

$$F_t^{\text{spring}} = k_t \xi, \quad (6)$$

静摩擦限界

$$F_t^{\text{max,S}} = \mu_S |F_n^*|, \quad (7)$$

を比較する.

(a) 動摩擦域 $F_t^{\text{spring}} > F_t^{\text{max,S}}$ のとき, 動摩擦限界

$$F_t^{\text{max,D}} = \mu_D |F_n^*|$$

を用いて剪断変位を縮小:

$$\xi \leftarrow \xi \frac{F_t^{\text{max,D}}}{k_t \xi}, \quad (8)$$

$$\mathbf{F}_t = -F_t^{\text{max,D}} \frac{\xi}{\xi}. \quad (9)$$

(b) 静止摩擦域 $F_t^{\text{spring}} \leq F_t^{\text{max,S}}$ ならば

$$\mathbf{F}_t = F_t^{\text{spring}} - \gamma_t \mathbf{v}_{\text{tr}}. \quad (10)$$

■4. トルク 球体半径 R_i, R_j の場合

$$\boldsymbol{\tau}_i = -R_i \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{F}_t, \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\tau}_j = -R_j \hat{\mathbf{n}} \times (-\mathbf{F}_t). \quad (12)$$

非球形粒子には $\mathbf{r}_{i,j} = \mathbf{x}_c - \mathbf{x}_{i,j}$ を用いた $\boldsymbol{\tau}_{i,j} = \mathbf{r}_{i,j} \times (\pm \mathbf{F}_t)$ を適用する.

■5. まとめ 式(??)-(??) が `tangential_model_luding_tn.h` に実装されたアルゴリズムの全貌である. 有効法線荷重の導入により粘着の影響を自然に織り込みつつ, 動摩擦係数へ連続遷移する Luding モデルは現実の粒子-粒子・粒子-壁接触で観測されるスティック-スリップ挙動を高精度で再現する.

参考文献

- [1] S. Luding. Cohesive, frictional powders: contact models for tension. *Granular Matter*, 10:235–246, 2008.