ヒステリシス非線形タンジェンシャルモデルの数式解説 (tangential_model_hysteretic_nonlinear.h)

Open DEM Japan

2025 年 6 月 29 日

本モデルは粒子間接触における接線（タンジェンシャル）相互作用を**履歴依存かつ非線形** に取り扱う．主な特徴は

- 剪断変位ベクトルの履歴保持により静止〜滑り遷移と履歴ループを再現
- 正味重なり δ_n がゼロに戻る際に剪断基準をリセットする塑性（ヒステリシス）機構
- ねじり（トーション）を任意に組み込み，結合摩擦限界を適用
- オプションで弾性ポテンシャルや散逸エネルギを計算し熱発生へ反映

以下，実装アルゴリズムを教科書形式で数式化し，式には通し番号を付す．

接触法線単位ベクトルを $\hat{\boldsymbol{n}}$，相対接線速度を $\boldsymbol{v}_{\mathrm{tr}}$，履歴剪断変位を $\boldsymbol{\xi}$，法線方向重なりを δ_n，前回圧縮ゼロ時点の重なりを δ_0 とする．

まず剪断履歴の時間積分

$$\boldsymbol{\xi}(t+\Delta t) = \boldsymbol{\xi}(t) + \boldsymbol{v}_{\mathrm{tr}}\Delta t - \big[(\boldsymbol{\xi}(t) + \boldsymbol{v}_{\mathrm{tr}}\Delta t)\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\big]\hat{\boldsymbol{n}}, \tag{1}$$

により常に接触面内へ射影される．

剪断長さ

$$\xi = \|\boldsymbol{\xi}\|. \tag{2}$$

■塑性（ヒステリシス）処理　法線重なりが完全開放 $\delta_n \le \delta_0$ となれば現在の剪断状態を塑性基準として保存し

$$\boldsymbol{\xi}_0 \leftarrow \boldsymbol{\xi}, \qquad \xi_0 \leftarrow \xi. \tag{3}$$

以降の弾性剪断は

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_0, \qquad \tilde{\xi} = \xi - \xi_0. \tag{4}$$

■接線ばね力　線形ばね仮定

$$\boldsymbol{F}_t^{\mathrm{spring}} = -k_t\tilde{\boldsymbol{\xi}}, \tag{5}$$

ここで k_t は接線ばね定数.

■クーロン限界　材料摩擦係数 μ を用いて

$$F_t^{\max} = \mu\,|F_n|, \tag{6}$$

ただし F_n は法線弾性力である.

■滑り判定と力の決定　ばね力の大きさ $F_t^{\mathrm{spring}} = k_t\tilde{\xi}$ が式 (6) を超えるか否かで場合分けを行う.

(A) **静止摩擦** $F_t^{\mathrm{spring}} \le F_t^{\max}$ のとき

$$\boldsymbol{F}_t = \boldsymbol{F}_t^{\mathrm{spring}} - \gamma_t \boldsymbol{v}_{\mathrm{tr}}, \tag{7}$$

ここで γ_t は接線減衰係数.

(B) **滑り摩擦** $F_t^{\mathrm{spring}} > F_t^{\max}$ のとき，剪断変位を縮小して

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}} \leftarrow \tilde{\boldsymbol{\xi}}\,\frac{F_t^{\max}}{k_t\tilde{\xi}}, \tag{8}$$

$$\boldsymbol{F}_t = -F_t^{\max}\,\frac{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}{\tilde{\xi}}. \tag{9}$$

■トーション（ねじり）　オプション `torsion` を有効にすると相対角速度 $\omega_n = \hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{rel}}$ を時間積分して角変位

$$\psi(t+\Delta t) = \psi(t) + \omega_n\,\Delta t \tag{10}$$

を得る．接触円の有効半径 R_c（球では半径 R と重なりから算出）を用い

$$T_n^{\mathrm{spring}} = -k_t\,R_c^2\,\psi, \tag{11}$$

$$T_n^{\max} = F_t^{\max}\,R_c. \tag{12}$$

$|T_n^{\mathrm{spring}}| > T_n^{\max}$ の場合は

$$T_n^{\mathrm{spring}} \leftarrow T_n^{\max}\,\mathrm{sgn}(T_n^{\mathrm{spring}}), \qquad \psi \leftarrow -\frac{T_n^{\mathrm{spring}}}{k_t R_c^2}. \tag{13}$$

ダッシュポット減衰を組み込む場合は $T_n^{\mathrm{spring}} - \gamma_t R_c^2 \omega_n$ を加える.

■トルク　球形粒子半径 R_i, R_j の典型例では

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}_i &= -R_i\,\hat{\boldsymbol{n}} \times \boldsymbol{F}_t + T_n^{\mathrm{spring}}\hat{\boldsymbol{n}},\\ \boldsymbol{\tau}_j &= -R_j\,\hat{\boldsymbol{n}} \times (-\boldsymbol{F}_t) - T_n^{\mathrm{spring}}\hat{\boldsymbol{n}}.\end{aligned} \tag{14}$$

非球形粒子は接触点 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{c}}$ と重心との差 $\boldsymbol{r}_{i,j}$ を用い $\boldsymbol{\tau}_{i,j} = \boldsymbol{r}_{i,j} \times (\pm\boldsymbol{F}_t)$ を採用し，ねじり項は同様に加算する.

■散逸パワー（熱発生）　式 (7) のダッシュポットと式 (8) に伴うスリップ縮小による散逸を

$$P_{\mathrm{vis}} = \gamma_t \boldsymbol{v}_{\mathrm{tr}}\cdot\boldsymbol{v}_{\mathrm{tr}}, \tag{15}$$

$$P_{\mathrm{slip}} = \frac{(k_t\tilde{\xi} - F_t^{\max})(k_t\tilde{\xi} + F_t^{\max})}{k_t\,\Delta t}, \tag{16}$$

と計算し，`heating_tangential_history` が `on` のときこれらを占有粒子または壁要素の発熱源へ加算する.

■まとめ　式 (1) – (16) が `tangential_model_hysteretic_nonlinear.h` に実装されたアルゴリズムの数理的全容である．剪断履歴ベクトルの再基準化（式 (3) – (4)）により荷重反転時の履歴ループを自然に形成し，非線形ばね–摩擦模型は実粒子のヒステリシス挙動を模倣する．さらにねじり摩擦を同一枠組みで扱い，エネルギ収支や熱生成の評価も可能にしている.