Superquadric Surface Model の数式解説 (surface_model_superquadric.h)

Open DEM Japan

2025 年 6 月 29 日

離散要素法において非球形粒子は超二次曲面 (superquadric; 以下 SQ と略記) で近似される．粒子 $k\,(=i,j)$ の形状パラメータを半軸 $\boldsymbol{a}_k=(a_{1k},a_{2k},a_{3k})$，ブロック指数（blockiness）$n_k>0$ とし，質量中心 $\boldsymbol{r}_k$，姿勢四元数 q_k で表す．ワールド座標 $\boldsymbol{X}$ を粒子座標 $\boldsymbol{X}'$ へ写す回転を $\mathcal{R}_k(q_k)$ とするとき，

$$\Phi_k(\boldsymbol{X})=\left[\left(\frac{|X_1'|}{a_{1k}}\right)^{\frac{2}{n_k}}+\left(\frac{|X_2'|}{a_{2k}}\right)^{\frac{2}{n_k}}\right]^{\frac{n_k}{n_k}}+\left(\frac{|X_3'|}{a_{3k}}\right)^{\frac{2}{n_k}}-1,\qquad \boldsymbol{X}'=\mathcal{R}_k^{\top}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{r}_k), \tag{1}$$

が $\Phi_k=0$ で粒子表面を定める．

二粒子間の接触点 $\boldsymbol{c}$ は

$$\Phi_i(\boldsymbol{c})=\Phi_j(\boldsymbol{c})\le 0,\qquad \boldsymbol{g}=\nabla\Phi_j(\boldsymbol{c})-\nabla\Phi_i(\boldsymbol{c}),\qquad \hat{\boldsymbol{n}}=\frac{\boldsymbol{g}}{\|\boldsymbol{g}\|}, \tag{2}$$

で得られる．(**??**) は両粒子の勾配差ベクトルにより法線 $\hat{\boldsymbol{n}}$ を定義する「勾配差法線モデル」であり，コード中では `vectorSubtract3D(particle_j.gradient, particle_i.gradient, sidata.en)` に相当する．

■接触点探索　前時刻の接触点 $\boldsymbol{c}^{\rm prev}$ を記憶し，ワールド速度 $\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_j$ と半径近似

$$R_k=\big(a_{1k}a_{2k}a_{3k}\big)^{1/3},\quad \rho=\frac{R_i}{R_i+R_j}, \tag{3}$$

を用いた線形予測

$$\boldsymbol{c}^{\rm init}=\boldsymbol{c}^{\rm prev}+\Delta t\big[(1-\rho)\boldsymbol{v}_i+\rho\,\boldsymbol{v}_j\big], \tag{4}$$

を Newton 反復の初期値とする．前時刻に非接触（フラグ `SURFACES_FAR`）であれば Oriented Bounding Box 交差判定後に最小 $\max(\Phi_i,\Phi_j)$ 点を `calc_contact_point_if_no_previous_point_avaialable` で決定する．

■法線重なり量　(**??**) の $\hat{\boldsymbol{n}}$ を用いて

$$\delta_n=-\big[\Phi_i(\boldsymbol{c})+\Phi_j(\boldsymbol{c})\big]\,(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{g}), \tag{5}$$

を正の重なり量と定義する（コードの `extended_overlap_algorithm`）．$\delta_n<0$ はギャップを意味し，接触判定は $\delta_n>0$ で true となる．

■有効半径と曲率制限　球モデルに対応させるため

$$R_{\text{eff}} = \frac{R_i R_j}{R_i + R_j}, \tag{6}$$

を基本とし，オプション `curvatureLimitFactor` $= \kappa > 0$ が指定される場合には接触点での平均曲率またはガウス曲率係数 $\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j$ を使い

$$\frac{1}{R'_{\text{eff}}} = \frac{1}{R_{\text{eff}}} + \kappa\big(\mathcal{K}_i + \mathcal{K}_j\big), \tag{7}$$

で上限を設ける（`get_effective_radius` 呼び出し）.

■接線速度　粒子角速度 $\boldsymbol{\omega}_i, \boldsymbol{\omega}_j$ と (**??**) の $c_i, c_j = R_k - \frac{1}{2}\delta_n$ から

$$v_n = (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}, \tag{8}$$

$$\boldsymbol{v}_t = (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j) - v_n \hat{\boldsymbol{n}} - \big(c_i \boldsymbol{\omega}_i + c_j \boldsymbol{\omega}_j\big) \times \hat{\boldsymbol{n}}, \tag{9}$$

を計算し，フック・ヒストリ型接触モデルなどに渡す.

■判定フロー

$$\text{OBB 交差} \Rightarrow \begin{cases} \text{近接または貫入} \\ \text{Newton 解法により } \boldsymbol{c}, \hat{\boldsymbol{n}}, \delta_n \\ \text{if } \delta_n > 0 \text{ then 接触フラグ=INTERSECT} \\ \text{else フラグ=CLOSE} \end{cases}$$

$$\text{非交差} \Rightarrow \text{フラグ=FAR.} \tag{10}$$

これらの式により，本 Superquadric Surface Model は一般非球形粒子の衝突幾何を連続的に球モデルへ帰着させつつ数値的に安定に評価することができる.