

# Surface Roughness Model の数式解説 (surface\_model\_roughness.h)

Open DEM Japan

2025年6月29日

離散要素法 (DEM) における衝突は、接触点を通る単位法線ベクトル  $\hat{\mathbf{n}} \in \mathbb{R}^3$  を基準に解析する。まず粒子  $i$  と粒子 (または壁)  $j$  の位置ベクトルを  $\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j$ , 並進速度を  $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j$  とする。

## ■相対位置と重なり量

$$\Delta = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, \quad (1)$$

$$r = \|\Delta\|, \quad (2)$$

$$\delta_n = R_i + R_j - r, \quad (3)$$

ただし壁との接触では  $R_j = 0$  とみなす。  $\delta_n > 0$  が物理的オーバーラップを意味する。

## ■法線方向の定義

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\Delta}{r}. \quad (4)$$

## ■相対速度の分解

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j, \quad (5)$$

$$v_n = \mathbf{v}_r \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad (6)$$

$$\mathbf{v}_n = v_n \hat{\mathbf{n}}, \quad (7)$$

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{v}_r - \mathbf{v}_n. \quad (8)$$

## ■衝突入射角 全速さ $\|\mathbf{v}_r\|$ を用いて

$$\cos \alpha = -\frac{v_n}{\|\mathbf{v}_r\|}, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi, \quad (9)$$

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos \alpha). \quad (10)$$

$\gamma$  は速度ベクトルが接触面へどれだけ斜めに入射したかを表す。

■粗さに伴う法線回転 粗さ効果では、 $\Delta\Gamma$  (粗さ起因の散乱角) と  $\psi$  (接線面内の方位角) が確率的に生成される。  $\{\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2\}$  は  $\hat{\mathbf{n}}$  に直交し互いに直交する任意の正規直交基底で、以下のように回転後の法線  $\hat{\mathbf{n}}'$  が得られる：

$$\delta\mathbf{R} = \sin \Delta\Gamma (\sin \psi \hat{\mathbf{n}}_1 + \cos \psi \hat{\mathbf{n}}_2), \quad (11)$$

$$\hat{\mathbf{n}}' = \cos \Delta\Gamma \hat{\mathbf{n}} + \delta\mathbf{R}. \quad (12)$$

壁接触では  $\hat{n}'$  は粒子中心と「粗さ壁面」との最近接点を結ぶ方向を与え、粒子同士の接触では符号が反転する。式 (??) が接触モデルの中核であり、粗さ統計による散乱が法線方向に織り込まれる。

■回転運動の寄与 粒子角速度  $\omega_i, \omega_j$  と (??) の  $\delta_n$  から縮退半径を定める：

$$c_i = R_i - \frac{1}{2}\delta_n, \quad c_j = R_j - \frac{1}{2}\delta_n. \quad (13)$$

壁接触では  $c_j = 0$  である。回転による相対速度は

$$\omega_r = \frac{c_i\omega_i + c_j\omega_j}{r}, \quad (14)$$

$$\mathbf{v}_\omega = \omega_r \times \Delta. \quad (15)$$

■接線方向の総相対速度

$$\mathbf{v}_{tr} = \mathbf{v}_t - \mathbf{v}_\omega. \quad (16)$$

以上で  $(\delta_n, v_n, \mathbf{v}_{tr})$  が求まり、後続の弾性・粘性・摩擦モデル（フック・ヒストリ型など）に入力される。

■壁への貫入防止 粗さによる補正後に  $\delta_n < 0$  かつ  $v_n > 0$  ならば、粒子は壁から離れるように速度を反転させる：

$$\mathbf{v}_i \leftarrow \mathbf{v}_i + 2v_n \mathbf{n}_{\text{plane}}, \quad (17)$$

ここで  $\mathbf{n}_{\text{plane}}$  は壁面法線である。

■まとめ 表面粗さモデルでは (??)-(??) により確率的に回転された法線  $\hat{n}'$  を用いて接触力の計算を行う。これにより多粒子系における散乱挙動が実験的に観測される不規則反射に近づく。運動量保存則やエネルギー散逸は粗さ角  $\Delta\Gamma$  の統計特性に依存して調整されるため、乱数生成部 (`generateDeltaGamma`, `generatePsi`) がモデルの可搬性を左右する。