

Luding 転がり - ねじり抵抗モデルの数式解説 (rolling_model_luding.h)

Open DEM Japan

2025年6月29日

本モデルは Luding [?] に基づき、転がりばね・粘性ダッシュポットをクーロン限界と接着力を考慮して組み合わせる。またオプション `torsion=true` でねじり（法線方向）ばね・ダッシュポットを追加できる。以下では粒子半径を R_i, R_j , 有効半径を

$$R^* = \frac{R_i R_j}{R_i + R_j}, \quad (\text{壁相手では } R^* = R_i) \quad (1)$$

とする。

■ 正規・接線モデルから与えられる量

$$\begin{aligned} F_n &= F_{n,\text{el}} + F_{n,\text{damp}} = k_n \delta_n - \gamma_n v_n, & k_t, \gamma_t: \text{接線ばね・粘性係数,} \\ k_c &= \text{接着ばね係数,} \quad F_{\text{adh}} &= f_{\text{adh}} (\leq 0). \end{aligned} \quad (2)$$

■ 相対回転速度

$$\omega_{ij} = \begin{cases} \omega_i - \omega_j & (\text{粒子対}) \\ \omega_i & (\text{粒子-壁}) \end{cases}, \quad e_n = \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|}.$$

ねじりを含めない標準設定では

$$\dot{\xi}_r = R^* (\omega_{ij} - (\omega_{ij} \cdot e_n) e_n), \quad \omega_r = \|\dot{\xi}_r\|. \quad (3)$$

`torsion=true` の場合、転がり用 $\dot{\xi}_r$ は接線成分とし、ねじり用

$$\omega_n = \omega_{ij} \cdot e_n \quad (4)$$

を別途用いる。

■ 弾性ばね剛性入力係数 $\mu_r = \text{coeffRollFrict}_{ij}$, $\eta_r = \text{coeffRollVisc}_{ij}$, $\chi = \text{kR2kcMax}_{ij}$ により

$$k_r = \chi k_t R^{*2}, \quad k_{\text{tors}} = k_r \quad (\text{torsion=true}). \quad (5)$$

■ ばねトルクの時間更新

$$M_r^{\text{SPR}}(t + \Delta t) = M_r^{\text{SPR}}(t) + k_r \dot{\xi}_r \Delta t, \quad (6)$$

$$M_{\text{tor}}^{\text{SPR}}(t + \Delta t) = M_{\text{tor}}^{\text{SPR}}(t) + k_{\text{tors}} \omega_n e_n \Delta t. \quad (7)$$

■ クーロン限界

$$F_{\text{eff}} = F_n + k_c \delta_n - F_{\text{adh}}, \quad (8)$$

$$M_{\text{max}} = \mu_r |F_{\text{eff}}| R^*. \quad (9)$$

ばねトルクの大きさが M_{max} を越えた場合は

$$\mathbf{M}^{\text{spr}} \leftarrow \frac{M_{\text{max}}}{\|\mathbf{M}^{\text{spr}}\|} \mathbf{M}^{\text{spr}},$$

ねじり側も同様。但し限界到達時にはダッシュポットを付加しない。

■ 粘性ダッシュポット縮約慣性モーメント I_{red} を EPSD3 と同様に求め、

$$c_r = \eta_r 2\sqrt{I_{\text{red}} k_r}, \quad \mathbf{M}_r^{\text{dash}} = c_r \dot{\boldsymbol{\xi}}_r, \quad (10)$$

$$c_{\text{tors}} = \eta_r 2\sqrt{I_{\text{red}} k_{\text{tors}}}, \quad \mathbf{M}_{\text{tor}}^{\text{dash}} = c_{\text{tors}} \omega_n \mathbf{e}_n. \quad (11)$$

■ 総転がり・ねじりトルク

$$\mathbf{M}_r = \mathbf{M}_r^{\text{spr}} + \mathbf{M}_r^{\text{dash}}, \quad (12)$$

$$\mathbf{M}_{\text{tor}} = \begin{cases} \mathbf{M}_{\text{tor}}^{\text{spr}} + \mathbf{M}_{\text{tor}}^{\text{dash}} & (\text{torsion}=\text{true}) \\ \mathbf{0} & (\text{false}) \end{cases}. \quad (13)$$

■ 運動方程式への適用

$$I_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i = -(\mathbf{M}_r + \mathbf{M}_{\text{tor}}) + (\mathbf{r}_{ci} \times \mathbf{F}_t), \quad (1)$$

$$I_j \dot{\boldsymbol{\omega}}_j = +(\mathbf{M}_r + \mathbf{M}_{\text{tor}}) - (\mathbf{r}_{cj} \times \mathbf{F}_t). \quad (14)$$

壁相手では第 2 式は省略する。

■ 履歴管理 $\mathbf{M}_r^{\text{spr}}$ および $\mathbf{M}_{\text{tor}}^{\text{spr}}$ は `r_torque_old`, `r_tor_torque_old` として保存し、接触終了時に 0 に戻して次回接触を初期化する。

以上の式 (1) – (14) により Luding モデルは

- 転がりばね剛性を接線ばねに比例させつつ係数 χ で調整、
- 接着ばね・引張力を含む修正クーロン限界 (??),
- 粘性ダッシュポットを慣性に整合させた減衰、
- オプションで法線ねじり抵抗を追加、

という特徴を備え、細粒 - 粗粒, 粘着 - 非粘着を問わず安定かつ物理的な回転運動の再現を可能にする。

参考文献

- [1] S. Luding, “Cohesive, frictional powders: contact models for tension,” *Granular Matter*, vol. 10, no. 4, pp. 235 – 246, 2008.