

CDT – JKR 転がり抵抗モデルの数式解説 (rolling_model_cdt_jkr.h)

Open DEM Japan

2025年6月29日

本稿では、JKR 接着理論と接触脱離ヒステリシス (Contact – Detachment Transition, CDT) に基づく転がり抵抗トルクを導出する。壁相手の場合は球半径 $R_j \rightarrow \infty$ とする。

■ 粒子半径 R_i, R_j から有効半径

$$R^* = \frac{R_i R_j}{R_i + R_j} \quad (\text{壁相手では } R^* = R_i) \quad (1)$$

を定義する。

(1) JKR 平衡接触半径 a_0

仕事当量の付着エネルギー密度 W (workOfAdhesion) と有効ヤング率 E^* を用い、

$$a_0 = \left(\frac{9\pi W R^{*2}}{2E^*} \right)^{1/3} \quad (2)$$

を得る。これは外力がゼロのとき JKR 平衡を満たす接触円半径である。

(2) 付着ヒステリシス係数と転がり摩擦係数

粒子表面の履歴依存係数 η_{adh} (adhesionHysteresis) により、

$$\mu_r = \frac{\pi a_0}{4R^*} \eta_{\text{adh}} \quad (3)$$

を定義する。 $\eta_{\text{adh}} > 1$ なら接触履歴で抵抗が増強される。

(3) 転がり変位と角速度差

粒子角速度差

$$\boldsymbol{\omega}_{ij} = \boldsymbol{\omega}_i - \boldsymbol{\omega}_j \quad (4)$$

を接線成分に射影し、転がり変位率

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_r = R^* (\boldsymbol{\omega}_{ij} - (\boldsymbol{\omega}_{ij} \cdot \mathbf{e}_n) \mathbf{e}_n), \quad \mathbf{e}_n = \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|} \quad (5)$$

を得る (壁相手では $\boldsymbol{\omega}_j = \mathbf{0}$)。時間積分で

$$\boldsymbol{\xi}_r(t + \Delta t) = \boldsymbol{\xi}_r(t) + \dot{\boldsymbol{\xi}}_r \Delta t \quad (6)$$

と更新する。

(4) 法線ばね力

正規重なり δ_n とばね定数 k_n から

$$F_n = k_n \delta_n \quad (7)$$

を計算する (k_n は対応する正規モデルが供給する)。

(5) 最大抵抗トルクの大きさ

Coulomb 型の上限

$$M_{\max} = \mu_r F_n R^* \quad (8)$$

を課す。

(6) 抵抗トルクの方向と制限

瞬時の回転速度差 (式 (4)) から

$$\mathbf{M}_r = -M_{\max} \frac{\dot{\boldsymbol{\xi}}_r}{\|\dot{\boldsymbol{\xi}}_r\|} \quad (9)$$

とし、オプション `torsionTorque=false` のときは接触法線方向成分 $(\mathbf{M}_r \cdot \mathbf{e}_n)\mathbf{e}_n$ を差し引き

$$\mathbf{M}_r \leftarrow \mathbf{M}_r - (\mathbf{M}_r \cdot \mathbf{e}_n)\mathbf{e}_n. \quad (10)$$

(7) 運動方程式への寄与

粒子 i への角運動方程式は

$$I_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i = \mathbf{M}_r + (\mathbf{r}_{ci} \times \mathbf{F}_t), \quad \mathbf{r}_{ci} = -R_i \mathbf{e}_n, \quad (11)$$

ここで \mathbf{F}_t は接線摩擦力である。粒子 j には反作用トルク $-\mathbf{M}_r$ が加わる。

以上の式 (1) - (11) によって、CDT-JKR モデルは JKR 付着力学を基盤とする転がり抵抗を簡潔に表現する。接触履歴によるヒステリシスは係数 η_{adh} に集約され、モデルパラメタの調整で実験的なエネルギー散逸を再現できる。