Thornton – Ning 接着弾 - 塑性モデルの数式解説（normal_model_thornton_ning.h）

Open DEM Japan

2025 年 6 月 29 日

粒子 i と j（あるいは粒子と剛壁）が正規方向に衝突・分離する過程を，Thornton & Ning (1998) が提案した接着弾 - 塑性理論で記述する。重なり量を

$$\delta = R_i + R_j - r, \qquad r = \|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j\|, \tag{1}$$

とし，圧縮方向を正に取る。壁相手では $R_j \to \infty$ とする。

有効量と材料定数

$$R^* = \begin{cases} \dfrac{R_i R_j}{R_i + R_j} & \text{粒子対} \\ R_i & \text{粒子–壁} \end{cases}, \qquad m^* = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}, \tag{2}$$

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_i^2}{E_i} + \frac{1-\nu_j^2}{E_j}, \qquad \frac{1}{G^*} = \frac{2-\nu_i}{4G_i} + \frac{2-\nu_j}{4G_j}. \tag{3}$$

表面エネルギ密度を γ_s とすると，JKR 理論に対応する臨界引張力（接着力）

$$F_c = \frac{3}{2}\pi\gamma_s R^*. \tag{4}$$

荷重履歴のための内部変数

接触ごとに

$$\delta_{\max},\ F_{\max},\ F_{\text{old}},\ \delta_{\text{old}},\ \text{flag}_{\text{adh}},\ \text{flag}_{\text{plast}},\ \text{flag}_{\text{detach}}$$

などを保存し，(i) バージン載荷，(ii) 弾性アンロード／リロード，(iii) 降伏後の塑性応答，(iv) 引張分離——を切り替える。

連絡荷重 F_ℓ（Thornton 形）

直前時刻の正規力 F_{old} から

$$F_\ell = \begin{cases} F_{\text{old}} + 2\Big(F_c + \sqrt{F_c(F_{\text{old}} + F_c)}\Big) & \text{(弾性部)} \\ F_{\text{old}} + 2\Big(F_c - \sqrt{F_c(F_{\text{old}} + F_c)}\Big) & \text{(粘着部)} \end{cases}, \tag{5}$$

を定義する（コード中 `calculate_fl`）。

接触半径 a

$$a = \begin{cases} \sqrt{R^*\delta} & (\gamma_s = 0) \\ \left(\dfrac{3R^*F_\ell}{4E^*}\right)^{1/3} & (\gamma_s > 0) \end{cases}.$$

弾性段階の剛性

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\delta} = k_{\mathrm{el}} = 2E^*a\left[1 - \frac{\sqrt{F_c}}{3\sqrt{F_\ell} - \sqrt{F_c}}\right]. \tag{6}$$

$\gamma_s = 0$ のとき括弧内は 1 となり Hertz 剛性 $2E^*a$ が得られる。

降伏判定と塑性剛性

ユーザ入力の無次元降伏比 η_{y} から

$$a_{\mathrm{y}} = \eta_{\mathrm{y}}\, R_i, \qquad \sigma_{\mathrm{y}} = \frac{2E^*a_{\mathrm{y}}}{\pi R^*} - \sqrt{\frac{2\gamma_s E^*}{\pi a_{\mathrm{y}}}}. \tag{7}$$

$a \geq a_{\mathrm{y}}$ で塑性化とみなし，剛性を

$$k_{\mathrm{pl}} = \frac{3\pi R^*\sigma_{\mathrm{y}}\sqrt{F_\ell} - 2E^*a_{\mathrm{y}}\sqrt{F_c}}{3\sqrt{F_\ell} - \sqrt{F_c}} \tag{8}$$

に置き換える（コード `calculate_plastic_force_differential`）。

力の時間積分

微小ステップ $\mathrm{d}\delta = \delta - \delta_{\mathrm{old}}$ について

$$F = F_{\mathrm{old}} + k\,\mathrm{d}\delta, \qquad k = \begin{cases} k_{\mathrm{pl}} & (a \geq a_{\mathrm{y}}) \\ k_{\mathrm{el}} & (a < a_{\mathrm{y}}). \end{cases} \tag{9}$$

$F < -(5/9)F_c$ となると粘着破断が起こり $F \to 0$，履歴は次回接触に備えて再構成される。

塑性化後の有効半径更新

降伏後は

$$R^* \leftarrow R^*\frac{F_\ell^{\max}}{F_{\max} + \sqrt{4F_cF_\ell^{\max}}}, \tag{10}$$

で接触曲率を緩和し，再評価を続ける（式 (10) はコード中の `reff` 更新）。

減衰と摩擦

正規方向にはレイリー型粘性は**付与せず**，せん断方向のみ $\gamma_t = 2\sqrt{5/6}\,\beta^*\sqrt{8G^*a\,m^*}$ を用いる（式はコード `gammat` に対応）。本稿では摩擦詳細を割愛する。

正規力の適用

$$\boldsymbol{F}_i = F\,\boldsymbol{e}_n, \qquad \boldsymbol{F}_j = -\boldsymbol{F}_i, \qquad \boldsymbol{e}_n = \frac{\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j}{r}. \tag{11}$$

壁相手では反作用を壁へ付与しない。

以上の連続更新で，(i) 弾性 Hertz 応答，(ii) 接着効果による引張域，(iii) 降伏を伴う硬化塑性，(iv) 破断・再接触履歴——を統一的に表現できる。