

JKR 接着接触モデルの数式解説 (normal_model_jkr.h)

Open DEM Japan

2025年6月29日

粒子 (半径 R_i, R_j , 質量 m_i, m_j) が互いに接触するとき, Johnson - Kendall - Roberts (JKR) 理論は表面エネルギー密度 w (コード中 `cohEnergyDens`) を陽に含む弾 - 粘 - 接着モデルを与える。以下では圧縮方向を正とし, 粒子圧縮量

$$\delta = R_i + R_j - r, \quad r = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|. \quad (1)$$

重力・摩擦項は省略する。壁相手の場合は $R_j \rightarrow \infty$ を取る。

■有効量

$$R^* = \begin{cases} \frac{R_i R_j}{R_i + R_j} & (\text{粒子対}) \\ R_i & (\text{粒子-壁}) \end{cases}, \quad m^* = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}, \quad (2)$$

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_i^2}{E_i} + \frac{1 - \nu_j^2}{E_j}, \quad \frac{1}{G^*} = \frac{2 - \nu_i}{4G_i} + \frac{2 - \nu_j}{4G_j}. \quad (3)$$

■接触半径の決定 接触円半径 a は JKR 平衡式

$$\delta = \frac{a^2}{R^*} - \sqrt{\frac{8\pi w a}{E^*}} \quad (4)$$

から得られる。式変形により

$$f(a) = a^3 - \frac{3R^*}{4E^*} F_n^{\text{JKR}} + \frac{3}{2}\pi R^* w a^2 = 0, \quad (5)$$

が現れ, コードではニュートン法で解く。初期値 $a_0 = R^*$ として

$$a_{k+1} = \frac{a_k^3 + a_k c + R^* \delta a_k}{2a_k^2 - c}, \quad c = R^* \sqrt{\pi w a_k / E^*}, \quad (6)$$

を数回繰り返せば十分収束する (??)。

■正規ばね・減衰係数 (Hertz 部分) 比較のため Hertz 線形化剛性

$$k_n = \frac{4}{3} E^* \sqrt{R^* \delta}, \quad k_t = 8G^* \sqrt{R^* \delta}, \quad (7)$$

および Rayleigh 型粘性減衰

$$\gamma_n = \gamma_t = -2\sqrt{\frac{5}{6}} \beta^* \sqrt{k_n m^*}, \quad (8)$$

を定義する (β^* は減衰係数)。

■正規方向接触力 求めた a を用い

$$F_n^{\text{elastic}} = \frac{4}{3} E^* \frac{a^3}{R^*}, \quad (9)$$

$$F_n^{\text{adh}} = -\sqrt{16\pi w E^* a^3}, \quad (10)$$

$$F_n^{\text{damp}} = -\gamma_n v_n, \quad (11)$$

を計算する (v_n は正規相対速度)。合力は

$$F_n^{\text{JKR}} = F_n^{\text{elastic}} + F_n^{\text{adh}} + F_n^{\text{damp}}. \quad (12)$$

ただし、接触面摩擦・転がり抵抗の計算には粘着項を除いた Hertz 力

$$F_n^{\text{Hertz}} = k_n \delta + F_n^{\text{damp}} \quad (13)$$

を用い (??) - (??) を再利用する。

■非接触領域の引力 $\delta < 0$ (粒子間隙) でも $|\delta|$ が臨界値

$$\delta_{\min} = -\frac{3}{2} \left(\frac{R^* (\pi w)^2}{2E^{*2}} \right)^{1/3} \quad (14)$$

を超えない限り接着力が作用する。式 (??) を $\delta < 0$ に拡張して a を求め、(??) をそのまま評価する。

■力の付与 粒子 i への力は

$$\mathbf{F}_i = F_n^{\text{JKR}} \mathbf{e}_n, \quad \mathbf{e}_n = \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|}, \quad (15)$$

粒子 j には反作用 $-\mathbf{F}_i$ が加わる。壁相手の場合は壁へ反作用を加えず粒子側のみを更新する。

■まとめ 式 (??) - (??) より、(i) 有効幾何・弾性定数の導入、(ii) JKR 平衡式による接触半径決定、(iii) 弾性項と表面エネルギーから導く接着力、(iv) Hertz 部分を用いる粘性減衰とせん断関連量、(v) 非接触域まで連続な吸引力、の 5 要素で DEM 接触を記述する。本実装ではニュートン法を用いて接触半径を高速収束させ、全接触状態を粘着弾性-粘性力で統一的に扱う。