ヒステリシス非線形モデル 1 の数式解説（normal_model_hysteretic_nonlinear1.h）

Open DEM Japan

2025 年 6 月 29 日

本稿では，粒子間あるいは粒子 - 壁間の正規方向相互作用をヒステリシスと非線形硬化を含む弾 - 塑性モデルで近似する手続きを説明する。重力や摩擦は扱わず，正規方向重なり量 δ ($\delta > 0$ で圧縮) とその履歴に着目する。

有効量と定数

有効半径 R^*，有効質量 m^* は

$$R^* = \begin{cases} \dfrac{R_i R_j}{R_i + R_j} & (\text{粒子対}) \\ R_i & (\text{粒子 - 壁}) \end{cases}, \qquad m^* = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}. \tag{1}$$

材料依存定数として

$$k_{\mathrm{e}} : \text{初期弾性ばね定数}, \qquad k_{\mathrm{adh}} : \text{付着ばね定数}, \tag{2}$$

$$f_{\mathrm{adh}} : \text{定常引張力 (pull–off force)}, \qquad \alpha,\ A_1, A_2, A_3 : \text{硬化係数}, \tag{3}$$

$$\phi_F : \text{塑性深さ係数}, \qquad C_{\mathrm{in}} : \text{内部定数}, \tag{4}$$

$$\lambda = \exp\!\big(\tfrac{1}{2} C_{\mathrm{rest}}\big), \qquad k_2^{\max} = \lambda k_{\mathrm{e}}, \tag{5}$$

を与える（ここで C_{rest} は常用対数で与えられる反発係数関連パラメタ)。

履歴変数

接触ごとに以下を記録する。

$$\delta_{\max},\ \delta_0,\ k_1,\ \delta_{0,\mathrm{old}},\ k_{1,\mathrm{old}},\ \delta_{\min},\ \beta,\ f_0$$

それぞれ最大圧縮 / 塑性戻り点 / 現在の弾性係数などを表す。接触が消滅すればこれらはゼロに初期化される。

弾塑性規則

■(i) 初期または再載荷（$\dot{\delta} > 0$ かつ $\delta \geq \delta_{\mathsf{old}}$）

$$k_1 = \begin{cases} A_2 & (\delta_0 = 0) \\ k_1\ (\text{履歴値}) & (\delta_0 > 0) \end{cases}, \tag{6}$$

$$f_{\mathrm{hys}}(\delta) = \begin{cases} -k_{\mathrm{adh}}\,\delta & (\delta \leq \delta_{\min}) \\ \beta(\delta - \delta_0) & (\delta_{\min} < \delta \leq \delta_0) \\ \alpha k_1 (\delta - \delta_0)^2 + f_0 & (\delta > \delta_0) \end{cases}. \tag{7}$$

ここで β は後述のアンロード段階で決定される。

■(ii) **アンロード（$\dot{\delta} < 0$ または $\delta < \delta_{\mathrm{old}}$）** まず

$$k_2 = A_3\, k_{1,\mathrm{old}}, \qquad \delta_0 = \bigl(1 - \tfrac{k_{1,\mathrm{old}}}{k_2}\bigr)\delta_{\max}, \tag{8}$$

$$\beta = \frac{\alpha k_{1,\mathrm{old}}\bigl(\delta_{\max} - \delta_{0,\mathrm{old}}\bigr)^2}{k_2\bigl(\delta_{\max} - \delta_0\bigr)}, \qquad \delta_{\min} = \frac{\beta(k_2 - k_{1,\mathrm{old}})}{\beta k_2 + k_{\mathrm{adh}}}\,\delta_{\max}, \tag{9}$$

$$k_1 = A_1\delta_{\max} + A_2. \tag{10}$$

そのうえで

$$f_{\mathrm{hys}}(\delta) = \begin{cases} \beta k_2(\delta - \delta_0) + \dfrac{f_{0,\mathrm{old}}}{\delta_{\max} - \delta_0}(\delta - \delta_0) & (\delta_{\min} \le \delta < \delta_0) \\ \beta k_2(\delta - \delta_0) + f_0 & (\delta \ge \delta_0) \\ -k_{\mathrm{adh}}\,\delta & (\delta < \delta_{\min}) \end{cases}. \tag{11}$$

減衰項

相対正規速度を v_n とすると

$$\gamma_n = \sqrt{\frac{5}{4}}\,\sqrt{\frac{4m^*\alpha k_1}{(\ln e)^2 + \pi^2}}\,\bigl(\delta^{1/4} + {\delta_0}^{1/4}\bigr), \tag{12}$$

$$F_{\mathrm{damp}} = -\gamma_n\, v_n, \tag{13}$$

を与える。せん断減衰 γ_t も同様に計算し得るが，ここでは省略する。

正規方向合力

$$F_n = f_{\mathrm{hys}}(\delta) + F_{\mathrm{damp}} + f_{\mathrm{adh}}. \tag{14}$$

負値抑制オプションを有効にすると $F_n < 0$ かつ $k_{\mathrm{adh}} = 0$, $f_{\mathrm{adh}} = 0$ のとき $F_n = 0$ とする。

履歴更新

載荷過程では $\delta_{\max} \leftarrow \max(\delta_{\max}, \delta)$ とし，アンロード過程では $\delta_{0,\mathrm{old}} \leftarrow \delta_0$, $k_{1,\mathrm{old}} \leftarrow k_1$ などを保存する。接触終了時にはすべての履歴をゼロに戻すことで，次回接触を初期状態から再開する。

まとめ

本モデルは (1) 最大圧縮に応じて増加する弾性ばね定数，(2) 弾塑性転移幅をもつ二次曲線 - 線形応答，(3) 付着ばねと定常引張力による引張抵抗，(4) 速度比例の粘性減衰，(5) 詳細な履歴管理による閉ループヒステリシス，の 5 要素で粒子接触の力学挙動を再現する。これにより実材料の塑性硬化とエネルギ散逸を高い忠実度で模擬できる。