

# ”Hooke/Stiffness/Collheat 法線接触モデル” の数式解説 (“normal\_model\_hooke\_stiffness\_collheat.h”)

Open DEM Japan

2025年6月29日

Hooke/Stiffness/Collheat モデルは、線形ばね - 粘性減衰 (Hooke/Stiffness) を基礎に

衝突瞬時における固 - 固熱移動

を組み込んだ拡張版である。以下では球半径  $R_i, R_j$  を持つ粒子同士 (壁は  $R_j \rightarrow \infty$ ) が重なり  $\delta > 0$  で衝突する状況を対象に、プログラム実装に対応する主要式を導出する。

■弾性ばねと粘性減衰 Hooke/Stiffness ベースなので、

$$r_{\text{eff}} = \frac{R_i R_j}{R_i + R_j}, \quad (1)$$

$$k_n = k_n^* \sqrt{r_{\text{eff}} \delta}, \quad k_t = k_t^* \sqrt{r_{\text{eff}} \delta}, \quad (2)$$

$$\gamma_n = \gamma_n^* m_{\text{eff}} \sqrt{r_{\text{eff}} \delta}, \quad \gamma_t = \begin{cases} \gamma_t^* m_{\text{eff}} \sqrt{r_{\text{eff}} \delta} & (\text{減衰 ON}) \\ 0 & (\text{OFF}) \end{cases}, \quad (3)$$

$$F_n = k_n \delta - \gamma_n v_n, \quad (4)$$

となる ( $v_n$  は法線相対速度)。

■衝突時間と接触半径の経験式 Lichtenegger らの実装では、Thornton - Ning 型の経験式を用いて衝突継続時間  $t_c$  と最大接触半径  $a_c$  を評価する：

$$a_c = 0.9745 \pi (m_{\text{eff}}/E_{\text{eff}})^{0.4} (r_{\text{eff}} v_n)^{0.8}, \quad (5)$$

$$t_c = 2.87 (m_{\text{eff}}/E_{\text{eff}})^{0.4} (r_{\text{eff}} v_n)^{-0.2}, \quad (6)$$

ただし  $E_{\text{eff}} = (1 - \nu_i^2)/E_i + (1 - \nu_j^2)/E_j$  の逆数。

■衝突時熱流束 粒子温度  $T_i, T_j$ , 体積密度  $\rho$ , 比熱  $c$ , 熱伝導率  $\kappa$  を用い、半無限固体同士の接触伝熱理論から

$$q_c = 0.87 \frac{(T_i - T_j) a_c \sqrt{t_c}}{\frac{1}{\sqrt{\rho_i c_i \kappa_i}} + \frac{1}{\sqrt{\rho_j c_j \kappa_j}}} \quad (7)$$

の熱量 (単位: J) が衝突中に粒子  $i \rightarrow j$  へ移動すると仮定する。

■温度更新 衝突完了時に粒子温度は

$$\Delta T_i = -\frac{q_c}{c_i m_i}, \quad \Delta T_j = +\frac{q_c}{c_j m_j}, \quad (8)$$

で即時更新される ( $m$  は質量).

■履歴フラグ 履歴変数 `contflag` を用いて

同一タイムステップ内に一度だけ式 (5) - (8) を評価

する機構が実装されている. 接触が終了すると `contflag` は 0 にリセットされ, 次回衝突で再度熱計算が有効になる.

■まとめ 式 (1) - (8) により, Hooke/Stiffness/Collheat モデルは

1. 線形ばね - 粘性減衰力  $F_n$  (式 (4)),
2. 経験式で算定した接触特性 (5)(6) を用いた瞬時熱移動 (7)(8),
3. 接触毎の一回限り熱更新を保証する履歴管理

を通じて「力学的衝突+衝突熱」カップリングを実装している. 本実装は運動エネルギーの損失ではなく, 粒子温度場へ直接エネルギーを再分配するため, 熱機械連成 DEM - CFD 解析の基礎ブロックとして利用できる.