

# ”Hooke/Stiffness 線形ばねモデル” の数式解説 (”normal\_model\_hooke\_stiffness.h”)

Open DEM Japan

2025年6月29日

本モデルは重なり一次の **線形ばね** と Rayleigh 型 **粘性減衰** を組み合わせた最も簡潔な DEM 法線接触式である。球体半径  $R_i, R_j$  (壁の場合  $R_j \rightarrow \infty$ )、重なり長さ  $\delta > 0$  を取り、法線相対速度を  $v_n$  とする。

## ■有効半径と荷重指数

$$r_{\text{eff}} = \begin{cases} \frac{R_i R_j}{R_i + R_j} & (\text{粒子同士}) \\ R_i & (\text{粒子-壁}) \end{cases}, \quad n = 1. \quad (1)$$

■パラメトリックばね剛性 ユーザ入力パラメータ  $k_n^*, k_t^*$  に Hertz 式のスケール  $\sqrt{r_{\text{eff}} \delta}$  を掛けて

$$k_n = k_n^* \sqrt{r_{\text{eff}} \delta}, \quad k_t = k_t^* \sqrt{r_{\text{eff}} \delta}. \quad (2)$$

(ソースでは  $k\_n[\text{itype}][\text{jtype}], k\_t$ )。

## ■2通りの減衰係数

$$\gamma_n = \begin{cases} \gamma_n^* & (\text{絶対減衰モード}) \\ m_{\text{eff}} \gamma_n^* & (\text{質量比例モード}) \end{cases}, \quad \gamma_t = \begin{cases} \gamma_t^* & (\text{絶対}), \\ m_{\text{eff}} \gamma_t^* & (\text{比例}) \end{cases} \quad (3)$$

(absolute\_damping フラグで分岐)。ただし接線減衰は tangential\_damping により

$$\gamma_t = \begin{cases} \gamma_t & (\text{ON}) \\ 0 & (\text{OFF}) \end{cases}.$$

## ■法線力

$$F_{\text{damp}} = -\gamma_n v_n, \quad (4)$$

$$F_{\text{el}} = k_n \delta, \quad (5)$$

$$F_n = F_{\text{el}} + F_{\text{damp}}. \quad (6)$$

負の反発を抑制する場合 (limitForce) は

$$F_n \leftarrow \max(F_n, 0). \quad (7)$$

## ■エネルギー計算 (オプション) 弾性ポテンシャル

$$U_n = \frac{1}{2} k_n \delta^2, \quad (8)$$

## 散逸エネルギー

$$E_{\text{diss}} = \int \gamma_n v_n^2 dt, \quad (9)$$

はフラグ `computeElasticPotential`, `computeDissipatedEnergy` が有効なとき履歴配列に逐次加算される。

■接触力の適用 単位法線  $\mathbf{e}_n = \mathbf{r}_{ij}/\|\mathbf{r}_{ij}\|$  として

$$\mathbf{F}_i = F_n \mathbf{e}_n, \quad (10)$$

$$\mathbf{F}_j = \begin{cases} -\mathbf{F}_i & (\text{粒子同士}) \\ \mathbf{0} & (\text{粒子-壁}) \end{cases}. \quad (1)$$

## ■モデルの特徴

1.  $F_{\text{el}} \propto \delta$  で計算コストが低い。
2. 係数  $k_n^*, k_t^*$  を通じて実験や高級モデル (Hertz など) に合わせたキャリブレーションが容易。
3. 減衰を「質量比例」または「絶対値」方式で選択できるため、速度スケーリング実験 (低重力等) にも対応。
4. オプションで弾性エネルギーと損失エネルギーを追跡し、熱連成や破壊判定モデルと連携可能。

本モデルは線形でありながら (??) の  $\sqrt{r_{\text{eff}}\delta}$  を含むため粒径スケールには Hertz 接触と同じ次元性を保持している。