

Hooke 接触モデルの数式解説 (normal_model_hooke.h)

Open DEM Japan

2025年6月29日

粒子同士あるいは粒子 - 壁間の弾性衝突を線形バネ - ダンパ系で近似する Hooke 接触モデルの力学式をまとめる。以下では、上付き * を「有効 (effective)」量に用いる。重力や他モデルの寄与は明示しない。

まず、接触幾何と材料定数から次の有効量を定義する。

$$R^* = \begin{cases} \frac{R_i R_j}{R_i + R_j} & (\text{粒子 } i \text{ と } j) \\ R_i & (\text{粒子 } i \text{ と剛壁}) \end{cases} \quad (1)$$

$$m^* = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j} \quad (2)$$

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_i^2}{E_i} + \frac{1 - \nu_j^2}{E_j}, \quad \frac{1}{G^*} = \frac{2 - \nu_i}{4G_i} + \frac{2 - \nu_j}{4G_j}, \quad (3)$$

ここで E , G , ν はそれぞれヤング率, 剛性率 (せん断弾性率), ポアソン比である。

■ばね定数 Hooke モデルでは非線形 Hertz 弾性を「特性速度」 v_c で較正した等価線形剛性として

$$k_n = \frac{16}{15} \sqrt{R^*} E^* \left(\frac{15 m^* v_c^2}{16 \sqrt{R^*} E^*} \right)^{1/5} \quad (4)$$

を用いる。接線方向剛性は

$$k_t = \begin{cases} k_n & (\text{既定}) \\ \frac{2}{7} k_n & (\text{ユーザ指定}) \end{cases} \quad (5)$$

■減衰係数と反発係数 正規方向の相対速度を v_n とし, 所望の反発係数 e との対応から

$$\gamma_n = \sqrt{\frac{4 m^* k_n (\ln e)^2}{(\ln e)^2 + \pi^2}} \quad (6)$$

が得られる。粘性流体中でのオプションでは Stokes 数

$$St = \frac{m^* v_n}{6\pi\mu R^{*2}} \quad (7)$$

を用い, 実験式

$$\ln e = \ln e_{\max} + \frac{C}{St} \quad (8)$$

によって e を補正する (μ は動粘性係数, C は経験定数)。

接線方向減衰は

$$\gamma_t = \begin{cases} \gamma_n & (\text{減衰を考慮}) \\ 0 & (\text{無視}) \end{cases} \quad (9)$$

■接触力 重なり量 δ_n (オプションで拘束された場合には補正値を差し引く) に対し

$$F_n^{\text{spring}} = k_n \delta_n, \quad (10)$$

$$F_n^{\text{damp}} = -\gamma_n v_n, \quad (11)$$

合力

$$F_n = F_n^{\text{spring}} + F_n^{\text{damp}} \quad (12)$$

がモデルの正規力となる。負値抑制オプションでは $F_n < 0$ を 0 に置換する。接線力は別途せん断モデルで評価されるため本稿では扱わない。

■エネルギー収支 弾性ポテンシャルエネルギー

$$U_{\text{el}} = \frac{1}{2} k_n \delta_n^2 \quad (13)$$

は物体運動の半ステップ補正を含め、接触消滅時に散逸項へ転送される。粘性損失は

$$\Phi_{\text{diss}} = |F_n^{\text{damp}} v_n| \quad (14)$$

で積分され、統計出力や熱生成モデルに利用される。

■まとめ Hooke 正規モデルは、(i) 有効幾何・材料定数による線形ばね剛性の較正、(ii) 反発係数を目標にした粘性減衰係数、(iii) 力学的の一貫性を保つエネルギー収支、という三要素で構成される。これにより Hertz 接触の力学応答を簡便かつ安定に近似できる。