

# ”Hertz/Stiffness 法線接触モデル” の数式解説 (“normal\_model\_hertz\_stiffness.h”)

Open DEM Japan

2025年6月29日

Hertz/Stiffness モデルは「重なり量  $\delta_n$  に比例する任意係数付き剛性」を用いて、Hertz 接触 ( $\delta_n^{3/2}$  依存) をパラメータ化した簡略バージョンである。球半径  $R_i, R_j$  (壁の場合  $R_j \rightarrow \infty$ ) とする。

## ■有効半径

$$r_{\text{eff}} = \begin{cases} \frac{R_i R_j}{R_i + R_j} & (\text{粒子-粒子}) \\ R_i & (\text{粒子-壁}) \end{cases} \quad (1)$$

## ■パラメトリック剛性係数 入力テーブル係数 $k_n^*, k_t^*$ を用いて

$$k_n = k_n^* \sqrt{r_{\text{eff}} \delta_n}, \quad k_t = k_t^* \sqrt{r_{\text{eff}} \delta_n}, \quad (2)$$

と設定する。ここで  $\sqrt{r_{\text{eff}} \delta_n}$  は真の Hertz 弾性率  $\frac{4}{3} E_{\text{eff}} \sqrt{r_{\text{eff}}}$  に対応し、 $k_n^*, k_t^*$  によって任意に拡張できる。

## ■粘性減衰係数 入力テーブル係数 $\gamma_n^*, \gamma_t^*$ と有効質量 $m_{\text{eff}}$ により

$$\gamma_n = \gamma_n^* m_{\text{eff}} \sqrt{r_{\text{eff}} \delta_n}, \quad \gamma_t = \begin{cases} \gamma_t^* m_{\text{eff}} \sqrt{r_{\text{eff}} \delta_n} & (\text{接線減衰 ON}) \\ 0 & (\text{接線減衰 OFF}) \end{cases} \quad (3)$$

とする。

## ■法線力

$$F_n = k_n \delta_n - \gamma_n v_n, \quad (4)$$

ただし  $v_n$  は法線相対速度。負の反発を許容しない場合は

$$F_n \leftarrow \max(F_n, 0) \quad (5)$$

と制御する (limitForce フラグ)。

## ■接触指数 式 (2) と (4) から

$$F_{n, \text{弾性}} = k_n \delta_n = k_n^* r_{\text{eff}}^{1/2} \delta_n^{3/2}, \quad (6)$$

となり、Hertz 理論と同じ  $\delta_n^{3/2}$  スケーリングを保ちながら、 $k_n^*$  で剛性強度を任意調整できる。

■力の適用 単位法線  $e_n$  を用い

$$\mathbf{F}_i = F_n \mathbf{e}_n, \quad \mathbf{F}_j = -\mathbf{F}_i \quad (\text{壁の場合 } \mathbf{F}_j = \mathbf{0}), \quad (7)$$

接線ばね・粘性項は別モデル（摩擦モデル）で処理される.

■まとめ Hertz/Stiffness モデルは

1.  $\sqrt{r_{\text{eff}} \delta_n}$  を共通スケールとする剛性・減衰（式 (2),(3)）,
2. 通常 Hertz 式に一致する  $\delta_n^{3/2}$  依存弾性力（式 (6)）,
3. パラメータ表で容易にキャリブレーション可能な  $k_n^*, k_t^*, \gamma_n^*, \gamma_t^*$ ,
4. 負の反発力を抑制するオプション（式 (5)）

を備え, Hertz 接触をベースにした「任意剛性スケーリング」モデルとして利用できる.