

# ”Hertz/Lubricated 法線接触モデル” の数式解説 (“normal\_model\_hertz\_lubricated.h”)

Open DEM Japan

2025年6月29日

Hertz/Lubricated 法線接触モデルは、乾式 Hertz 接触に短距離潤滑（流体力学的）抵抗を滑らかに重ね合わせたモデルである。球対球（または球対壁）の場合を考え、プログラムに相当する主要式を導出する。

## ■接触幾何とギャップ高さ

$$r_{\text{eff}} = \begin{cases} \frac{R_i R_j}{R_i + R_j} & (\text{粒子 - 粒子}) \\ R_i & (\text{粒子 - 壁}) \end{cases} \quad (1)$$

$$h_{ij} = \begin{cases} (r - (R_i + R_j)) & (\text{粒子 - 粒子}) \\ (r - R_i) & (\text{粒子 - 壁}) \end{cases} \quad (2)$$

■最小接近距離 流体粘度  $\eta_f$ 、最接近時の法線相対速度  $\Delta v_0 = \max(-v_n, 0)$ 、有効ヤング率  $E_{\text{eff}}$  を用いて

$$h_{\text{min}}^* = 0.37 \left( \frac{\eta_f \Delta v_0}{E_{\text{eff}}} \right)^{0.4} r_{\text{eff}}^{0.6} \quad (3)$$

と定義する。ユーザ入力の下限  $h_{\text{min}}^\sigma$  と比較し

$$h_{\text{min}} = \max(h_{\text{min}}^\sigma, h_{\text{min}}^*) \quad (4)$$

を採用する（コード中の `hminSigma`, `hmin`）。

## ■乾式 Hertz 接触

$$k_n = \frac{4}{3} E_{\text{eff}} \sqrt{r_{\text{eff}} (h_{\text{min}} - h_{ij})_+}, \quad (5)$$

$$\gamma_n = -2\sqrt{\frac{5}{6}} \beta_{\text{eff}} \sqrt{2E_{\text{eff}} m_{\text{eff}} \sqrt{r_{\text{eff}} (h_{\text{min}} - h_{ij})_+}}, \quad (6)$$

$$F_c = k_n (h_{\text{min}} - h_{ij})_+ + \gamma_n (-v_n), \quad (7)$$

ただし  $(\cdot)_+ = \max(\cdot, 0)$ 。負の反発を避けるため  $F_c = \max(F_c, 0)$  とする。

■潤滑抵抗 ギャップが十分大きい場合の潤滑力は

$$F_\ell = -6\pi\eta_f r_{\text{eff}}^2 \frac{v_n}{\max(h_{ij}, h_{\text{min}})} \quad (8)$$

で与えられる。

■滑らかなブレンド

$$F_n = \begin{cases} F_\ell & (h_{ij} > h_{\min}) \\ \frac{h_{ij}}{h_{\min}} F_\ell + \left(1 - \frac{h_{ij}}{h_{\min}}\right) F_c & (0 \leq h_{ij} \leq h_{\min}) \end{cases} \quad (9)$$

とし、ギャップが  $h_{\min}$  を下回ると乾式接触へ連続的に移行する。

■力の適用 得られた法線力は接触単位法線  $e_n$  方向に作用し、

$$\mathbf{F}_i = F_n \mathbf{e}_n, \quad \mathbf{F}_j = -\mathbf{F}_i \quad (10)$$

となる（壁の場合は  $\mathbf{F}_j$  を持たない）。

■まとめ 式 (1) – (10) により Hertz/Lubricated モデルは

1. 潤滑抵抗  $F_\ell$  (式 (8)) による粘性流体効果,
2. 乾式 Hertz 力  $F_c$  (式 (7)) による弾性・減衰効果,
3. ギャップに応じた連続ブレンド (式 (9))

を統合的に表現し、粒子間または粒子-壁間の短距離相互作用を忠実に再現する。