

”Hertz 法線接触モデル” の数式解説 (“normal_model_hertz.h”)

Open DEM Japan

2025 年 6 月 29 日

本ファイルで実装されている Hertz 法線接触モデルは、弾性体相互の非線形ばねとレイリー型減衰を組み合わせた典型的な離散要素法 (DEM) の接触力モデルである。以下では球対球 (あるいは球対壁) を想定し、プログラムに対応する主要式を教科書的に導出する。

■接触幾何と有効量

$$r_{\text{eff}} = \begin{cases} \frac{R_i R_j}{R_i + R_j} & (\text{粒子 - 粒子}) \\ R_i & (\text{粒子 - 壁}) \end{cases} \quad (1)$$

$$a = \sqrt{r_{\text{eff}} \delta_n} \quad (2)$$

■弾性係数

$$S_n = 2 Y_{\text{eff}} \sqrt{r_{\text{eff}} \delta_n} \quad (3)$$

$$S_t = 8 G_{\text{eff}} \sqrt{r_{\text{eff}} \delta_n} \quad (4)$$

■接触剛性

$$k_n = \frac{4}{3} Y_{\text{eff}} \sqrt{r_{\text{eff}} \delta_n} \quad (5)$$

$$k_t = S_t \quad (6)$$

■減衰係数

$$\gamma_n = -2 \sqrt{\frac{5}{6}} \beta_{\text{eff}} \sqrt{S_n m_{\text{eff}}} \quad (7)$$

$$\gamma_t = -2 \sqrt{\frac{5}{6}} \beta_{\text{eff}} \sqrt{S_t m_{\text{eff}}} \quad (\text{接線減衰を用いる場合}) \quad (8)$$

■法線力

$$F_n = k_n \delta_n - \gamma_n v_n \quad (9)$$

■接触ポテンシャルエネルギー

$$U_n = \int_0^{\delta_n} k_n(\xi) d\xi = \frac{2}{5} k_n \delta_n = \frac{2}{5} \frac{4}{3} Y_{\text{eff}} \sqrt{r_{\text{eff}}} \delta_n^{5/2} \quad (10)$$

■エネルギー散逸

$$E_{\text{diss}} = - \int F_{\text{damp}} v_n dt = \int \gamma_n v_n^2 dt \quad (11)$$

■まとめ 式 (1)–(11) により, Hertz 法線接触モデルは

1. $\delta_n^{3/2}$ に比例する非線形ばね力 (式 (9)),
2. 材料依存性を示す $Y_{\text{eff}}, G_{\text{eff}}$ (式 (3)–(6)),
3. Rayleigh 型減衰による速度依存性 (式 (7)–(9)),
4. エネルギー保存・散逸の両立 (式 (10), (11))

を統合的に記述する. したがって `normal_model_hertz.h` は弾性反発と粘性減衰を同時に取り入れた現代的離散要素解析の標準モデルを実装していると言える.