

”Edinburgh Stiffness モデル” の数式解説 (“normal_model_edinburgh_stiffness.h”)

Open DEM Japan

2025年6月29日

Edinburgh Stiffness モデルは

- 主荷重（弾性）剛性 k_1 ,
- 副荷重（弾 - 塑性）剛性 k_2 ,
- 動的接着剛性 k_c ,
- 粘性減衰 γ_n

を履歴依存で組み合わせ、ヒステリシスと付着を同時に扱う。球半径 R_i, R_j （壁の場合 $R_j \rightarrow \infty$ ）、重なり長さ $\delta > 0$ とする。

■弾性基準剛性 与えられた材料定数から

$$k_1 = K_e, \quad k_2 = k_1 \kappa_{21}, \quad (1)$$

を初期値とする。ここで $\kappa_{21} > 1$ は副荷重剛性比である。

■指数付き変形量 モデルは一般指数 $d_{\text{ex}} > 1$ と接着指数 $c_{\text{ex}} > 0$ を用いて

$$\delta^{(d)} = \delta^{d_{\text{ex}}}, \quad \delta^{(c)} = \delta^{c_{\text{ex}}}, \quad (2)$$

を定義する。逆指数 d_{ex}^{-1} を ξ と書く。

■弾 - 塑性分割

$$\lambda = (1 - k_1/k_2)^\xi, \quad \delta_p = \lambda \delta, \quad (3)$$

を「塑性重なり」と呼ぶ。履歴最大値

$$\delta_{p,\text{max}}(t) = \max_{0 \leq t' \leq t} \delta_p(t') \quad (4)$$

を更新し、対応する $\delta_{p,\text{max}}^{(d)} = (\delta_{p,\text{max}})^{d_{\text{ex}}}$ を保持する。

■準接触弾力

$$F_{\text{tmp}} = k_2 (\delta^{(d)} - \delta_{p,\text{max}}^{(d)}) \quad (5)$$

が主枝と副枝を区別する指標となる。

■動的接着剛性 表面エネルギー γ_s と幾何学から得る接触半径

$$a = \frac{\sqrt{4d^2 R_i^2 - (d^2 - R_j^2 + R_i^2)^2}}{2d}, \quad d = R_i + R_j - \delta,$$

を用い最小接着力

$$F_{\min} = 1.5 \pi \gamma_s a, \quad (6)$$

を計算し, リミット $F_{\min} \leq 0.5 k_2 \delta_{p,\max}^{(d)}$ を課す. 最終的な接着剛性は

$$k_c = \frac{F_{\min}}{(\delta_{\min})^{c_{\text{ex}}}}, \quad \delta_{\min} = \begin{cases} 0.5 \delta_{p,\max} & (F_{\min} \text{が制限に達した場合}) \\ (\delta_{p,\max}^{(d)} - \frac{F_{\min}}{k_2})^\xi & (\text{その他}) \end{cases} \quad (7)$$

■履歴依存接触力

$$F_{\text{el}} = \begin{cases} k_1 \delta^{(d)} & (F_{\text{tmp}} \geq k_1 \delta^{(d)}) \quad (\text{主荷重}) \\ F_{\text{tmp}} & (-k_c \delta^{(c)} < F_{\text{tmp}} < k_1 \delta^{(d)}) \\ -k_c \delta^{(c)} & (F_{\text{tmp}} \leq -k_c \delta^{(c)}) \quad (\text{付着域}) \end{cases} \quad (8)$$

■粘性減衰 常用対数による回復係数 e_{\log} と有効質量 m_{eff} から

$$\gamma_n = \sqrt{\frac{4m_{\text{eff}}k_1}{1 + (\pi/e_{\log})^2}}, \quad F_{\text{damp}} = -\gamma_n v_n, \quad (9)$$

とし (接線減衰を省略), v_n は法線相対速度である.

■総法線力 引張りきい値 F_0 を持たせ

$$F_n = F_{\text{el}} + F_{\text{damp}} + F_0, \quad (10)$$

負の不自然な圧縮を防ぐ場合は $F_n \geq 0$ へ切り上げる.

■接触指数 指数 d_{ex} が 1.5 のとき, $F_{\text{el}} \propto \delta^{3/2}$ となり Hertz 状の非線形剛性が回復する. Edinburgh Stiffness モデルは式 (1) – (10) を時間積分ごとに評価し, 履歴依存ヒステリシスと動的付着が滑らかに切り替わる接触応力を付与する.