

”Edinburgh 法線接触モデル” の数式解説 (“normal_model_edinburgh.h”)

Open DEM Japan

2025年6月29日

Edinburgh モデルは、Hertz 型非線形弾性を基礎に

1. 荷重 - はく離ヒステリシス (弾 - 塑性),
2. 動的接着 (付着剛性),
3. 粘性減衰

を履歴変数で統合した汎用接触式である。以下にモデルの逐次評価式を示す。

■弾性基準剛性と指数

$$k_1 = \begin{cases} \frac{4}{3} E_{\text{eff}} \sqrt{r_{\text{eff}}} & (d_{\text{ex}} \neq 1) \\ 2E_{\text{eff}} r_{\text{eff}} & (d_{\text{ex}} = 1) \end{cases}, \quad k_2 = k_1 \kappa_{21}, \quad (1)$$

$$r_{\text{eff}} = \frac{R_i R_j}{R_i + R_j} \quad (\text{粒子同士}), \quad d_{\text{ex}} > 1, \quad c_{\text{ex}} > 0.$$

■指数付き重なり

$$\delta^{(d)} = \delta^{d_{\text{ex}}}, \quad \delta^{(c)} = \delta^{c_{\text{ex}}}, \quad \xi = d_{\text{ex}}^{-1}. \quad (2)$$

■塑性重なりと履歴最大値

$$\lambda = (1 - k_1/k_2)^\xi, \quad \delta_p = \lambda \delta, \quad \delta_{p,\text{max}}(t) = \max_{0 \leq t' \leq t} \delta_p(t'). \quad (3)$$

■接触分岐指標

$$F_{\text{tmp}} = k_2 (\delta^{(d)} - \delta_{p,\text{max}}^{(d)}), \quad \delta_{p,\text{max}}^{(d)} = (\delta_{p,\text{max}})^{d_{\text{ex}}}. \quad (4)$$

■動的接着剛性 粒子間中心距離 $d = R_i + R_j - \delta$ と接触半径

$$a = \frac{\sqrt{4d^2 R_i^2 - (d^2 - R_j^2 + R_i^2)^2}}{2d},$$

表面エネルギー γ_s から最小付着力

$$F_{\text{min}} = 1.5 \pi \gamma_s a, \quad (5)$$

を得てリミット $F_{\text{min}} \leq 0.5 k_2 \delta_{p,\text{max}}^{(d)}$ を課し

$$k_c = \frac{F_{\min}}{(\delta_{\min})^{c_{\text{ex}}}}, \quad \delta_{\min} = \begin{cases} 0.5 \delta_{\text{p,max}} & (F_{\min} \text{ が制限値}) \\ \left(\delta_{\text{p,max}}^{(d)} - \frac{F_{\min}}{k_2} \right)^\xi & (\text{その他}) \end{cases}. \quad (6)$$

■履歴依存弾 - 塑性力

$$F_{\text{el}} = \begin{cases} k_1 \delta^{(d)} & (F_{\text{tmp}} \geq k_1 \delta^{(d)}) \\ F_{\text{tmp}} & (-k_c \delta^{(c)} < F_{\text{tmp}} < k_1 \delta^{(d)}) \\ -k_c \delta^{(c)} & (F_{\text{tmp}} \leq -k_c \delta^{(c)}) \end{cases}. \quad (7)$$

■粘性減衰 回復係数の常用対数 e_{\log} と有効質量 m_{eff} を用い

$$\gamma_n = \sqrt{\frac{4m_{\text{eff}}k_1}{1 + (\pi/e_{\log})^2}}, \quad F_{\text{damp}} = -\gamma_n v_n, \quad (8)$$

とする。接線減衰はオプションであり既定では 0.

■総法線力 引張りきい値 F_0 を足し合わせ

$$F_n = F_{\text{el}} + F_{\text{damp}} + F_0, \quad (9)$$

必要に応じ $F_n \geq 0$ に制限して数値安定性を確保する。

■指数とモデルの特徴 $d_{\text{ex}} = 1.5$ ならば式 (7) の主枝が $F_{\text{el}} \propto \delta^{3/2}$ となり Hertz 非線形弾性を再現する。Edinburgh モデルは式 (1) - (9) をタイムステップ毎に評価することで、

- 荷重 - はく離ヒステリシス,
- 接触 - 分離時の付着力変化,
- 粘性損失

を同時に扱い、粒子系の複雑な機械応答を忠実に模擬する。