非線形ボンドモデルの数式解説 (cohesion_model_bond_nonlinear.h)

Open DEM Japan

2025 年 6 月 29 日

二つの球状粒子 i，j（半径 R_i，R_j，質量 m_i，m_j）間に非線形ボンドが生成されるとき，以下の幾何量を定義する．

$$r = \|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j\|, \qquad r_0 = r\big|_{\text{bond 生成時}}, \qquad \delta = r_0 - r \tag{1}$$

$\delta > 0$ は圧縮，$\delta < 0$ は引張を示す．ボンドは半径

$$r_b = \lambda \min(R_i, R_j) \tag{2}$$

をもち，断面積・極断面二次モーメント・慣性モーメントは

$$A = \pi r_b^2, \qquad J = \tfrac{1}{2} A r_b^2, \qquad I = \tfrac{1}{2} J = \tfrac{1}{4}\pi r_b^4 \tag{3}$$

■法線方向力　荷重履歴を考慮した 6 段階の分割非線形ばねで表す．圧縮段（$\delta > 0$）には指数 1/2，引張段（$\delta < 0$）には指数 1 を用い，履歴最大・最小変位

$$\delta_{\max} = \max(\delta, \delta_{\max}^{\text{旧}}), \qquad \delta_{\min} = \min(\delta, \delta_{\min}^{\text{旧}}) \tag{4}$$

を都度更新する．係数

$$\delta_{c1} = \left(\frac{k_{u\,\mathrm{n}1} - k_{\mathrm{n}1}}{k_{u\,\mathrm{n}1} + k_{c\,\mathrm{n}1}}\right)^2 \delta_{\max}, \qquad \delta_{c2} = \left(\frac{k_{u\,\mathrm{n}2} - k_{\mathrm{n}2}}{k_{u\,\mathrm{n}2} + k_{c\,\mathrm{n}2}}\right) \delta_{\min} \tag{5}$$

を用いると，法線力

$$F_{\mathrm{n}}(\delta) = \begin{cases} k_{\mathrm{n}2} A\,\delta & (\delta < \delta_{\min}) \\ k_{u\,\mathrm{n}2} A\,\delta + (k_{\mathrm{n}2} - k_{u\,\mathrm{n}2}) A\,\delta_{\min} & (\delta_{\min} \le \delta < \delta_{c2}) \\ -k_{c\,\mathrm{n}2} A\,\delta & (\delta_{c2} \le \delta < 0) \\ -k_{c\,\mathrm{n}1} A\,|\delta|^{1/2} & (0 \le \delta < \delta_{c1}) \\ k_{u\,\mathrm{n}1} A\,|\delta|^{1/2} + (k_{\mathrm{n}1} - k_{u\,\mathrm{n}1}) A\,|\delta_{\max}|^{1/2} & (\delta_{c1} \le \delta < \delta_{\max}) \\ k_{\mathrm{n}1} A\,|\delta|^{1/2} & (\delta \ge \delta_{\max}) \end{cases} \tag{6}$$

が得られる．ここで $k_{\mathrm{n}1}, k_{u\,\mathrm{n}1}, k_{c\,\mathrm{n}1}$ は圧縮域用，$k_{\mathrm{n}2}, k_{u\,\mathrm{n}2}, k_{c\,\mathrm{n}2}$ は引張域用の剛性である．

■接線方向力　接線相対速度

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{tr}} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{t}} + (\boldsymbol{\omega}_i R_i - \boldsymbol{\omega}_j R_j) \times \boldsymbol{n} \tag{7}$$

($\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j)/r$) を用い，陽的オイラー積分で

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{t}}^{n+1} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{t}}^{n} - k_{\mathrm{t}} A\, \Delta t\, \boldsymbol{v}_{\mathrm{tr}} \tag{8}$$

と更新し，更新後 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{t}}$ を $\boldsymbol{n}$ 方向へ射影除去して純粋に接線成分だけ残す．

■ねじりトルク　法線回り相対角変位 $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{n}}$ を累積し

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{n}} = -\, f_{\theta}\big(\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{n}}\big)\, J \tag{9}$$

とする．f_θ は (6) と同構造の 6 分割非線形関数で，$k_{\mathrm{tn}}, k_{u\,\mathrm{tn}}, k_{c\,\mathrm{tn}}$ が対応する剛性係数である．

■曲げトルク　接線回り角変位 $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{t}}$ を用いて

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{t}} = -\, g_{\theta}\big(\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{t}}\big)\, I \tag{10}$$

を与える．g_θ も (6) 型の分割非線形関数で，$k_{\mathrm{tt}}, k_{u\,\mathrm{tt}}, k_{c\,\mathrm{tt}}$ を含む．

■粘性減衰　法線・接線力および各トルクには百分率形式の減衰が付加される．

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{n,d}} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{n}} - \eta_{\mathrm{n}}\, |\boldsymbol{F}_{\mathrm{n}}|\, \mathrm{sgn}(\boldsymbol{v}_{\mathrm{n}}), \quad \boldsymbol{F}_{\mathrm{t,d}} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{t}} - \eta_{\mathrm{t}}\, |\boldsymbol{F}_{\mathrm{t}}|\, \mathrm{sgn}(\boldsymbol{v}_{\mathrm{tr}}) \tag{11}$$

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{n,d}} = \boldsymbol{T}_{\mathrm{n}} - \eta_{\mathrm{tn}}\, |\boldsymbol{T}_{\mathrm{n}}|\, \mathrm{sgn}(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{n}}), \quad \boldsymbol{T}_{\mathrm{t,d}} = \boldsymbol{T}_{\mathrm{t}} - \eta_{\mathrm{tt}}\, |\boldsymbol{T}_{\mathrm{t}}|\, \mathrm{sgn}(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{t}}) \tag{12}$$

ここで η は各減衰比である．

■粒子に作用する合力・合トルク

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{n,d}} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{t,d}}, \qquad \boldsymbol{T}_i = r_{ci}\, \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{F}_{\mathrm{t,d}} + \boldsymbol{T}_{\mathrm{n,d}} + \boldsymbol{T}_{\mathrm{t,d}}, \quad \boldsymbol{T}_j = -\,\boldsymbol{T}_i \tag{13}$$

ただし $r_{ci} = r\, R_i/(R_i + R_j)$ は粒子 i のモーメント腕である．

■破壊判定

$$\sigma = \frac{|\boldsymbol{F}_{\mathrm{n}}|}{A} + \frac{|\boldsymbol{T}_{\mathrm{t}}|\, r_b}{I}, \qquad \tau = \frac{|\boldsymbol{F}_{\mathrm{t}}|}{A} + \frac{|\boldsymbol{T}_{\mathrm{n}}|\, r_b}{J} \tag{14}$$

とし，引張強度 $\sigma_{\max}$，せん断強度 $\tau_{\max}$ を超えるか,

$$\sigma \ge \sigma_{\max} \quad \text{または} \quad \tau \ge \tau_{\max} \tag{15}$$

でボンドは破壊する（オプションで $\sigma_{\max}$ を引張／圧縮比 γ により補正可）．距離破壊モードでは $r > r_{\max}$ がトリガとなる．

■まとめ　本モデルは圧縮域に平方根応力—ひずみ関係，引張域に線形関係を採用し，履歴依存の剛性遷移を伴う 3 次元ボンド要素である．法線・接線・ねじり・曲げの 6 自由度をそれぞれ非線形ばね - ダンパで表現し，応力または間隔に基づく破壊をサポートする．よって土粒子，岩石粒子など脆性材料の拘束破壊挙動を高精度に表現できる．