線形ボンドモデルの数式解説（`cohesion_model_bond.h`）

Open DEM Japan

2025 年 6 月 29 日

二球 i, j（半径 R_i, R_j）間に線形ボンドが生成されるとき，中心間距離 $r = \|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j\|$ と生成時距離 r_0 から

$$\delta = r_0 - r \tag{1}$$

を定義する（$\delta > 0$: 圧縮，$\delta < 0$: 引張）．ボンド半径

$$r_b = \lambda \min(R_i, R_j) \tag{2}$$

より断面積・極断面二次モーメント・慣性モーメントは

$$A = \pi r_b^2, \qquad J = \tfrac{1}{2} A r_b^2, \qquad I = \tfrac{1}{2} J. \tag{3}$$

■法線ばね　線形ばね定数 k_n（単位面積当たり）を用いて

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{n} = k_\mathrm{n} A \,\delta\, \boldsymbol{n}, \qquad \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j}{r}. \tag{4}$$

■接線ばね　接線相対速度

$$\boldsymbol{v}_\mathrm{tr} = \boldsymbol{v}_\mathrm{t} + (\boldsymbol{\omega}_i R_i - \boldsymbol{\omega}_j R_j) \times \boldsymbol{n} \tag{5}$$

を用い，オイラー陽積分で

$$\boldsymbol{F}_\mathrm{t}^{n+1} = \boldsymbol{F}_\mathrm{t}^{n} - k_\mathrm{t} A \,\Delta t\, \boldsymbol{v}_\mathrm{tr}, \tag{6}$$

その後 $\boldsymbol{F}_\mathrm{t}$ の法線成分を除去して完全に接線方向にする．

■ねじりトルク　法線回り角変位 $\boldsymbol{\theta}_\mathrm{n} = \int \boldsymbol{\omega}_\mathrm{n}\,\mathrm{d}t$ に対し

$$\boldsymbol{T}_\mathrm{n} = -k_\mathrm{t} J \,\boldsymbol{\theta}_\mathrm{n}. \tag{7}$$

■曲げトルク　接線回り角変位 $\boldsymbol{\theta}_\mathrm{t} = \int \boldsymbol{\omega}_\mathrm{t}\,\mathrm{d}t$ に対し

$$\boldsymbol{T}_\mathrm{t} = -k_\mathrm{n} I \,\boldsymbol{\theta}_\mathrm{t}. \tag{8}$$

■粘性減衰　減衰係数 η を持つ百分率ダンパを各自由度に付加する．

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{n},d} = \boldsymbol{F}_\mathrm{n} - \eta_\mathrm{n} |\boldsymbol{F}_\mathrm{n}| \,\mathrm{sgn}(\boldsymbol{v}_\mathrm{n}), \quad \boldsymbol{F}_{\mathrm{t},d} = \boldsymbol{F}_\mathrm{t} - \eta_\mathrm{t} |\boldsymbol{F}_\mathrm{t}| \,\mathrm{sgn}(\boldsymbol{v}_\mathrm{tr}), \tag{9}$$

$$\boldsymbol{T}_{\mathrm{n},d} = \boldsymbol{T}_\mathrm{n} - \eta_\mathrm{tn} |\boldsymbol{T}_\mathrm{n}| \,\mathrm{sgn}(\boldsymbol{\omega}_\mathrm{n}), \quad \boldsymbol{T}_{\mathrm{t},d} = \boldsymbol{T}_\mathrm{t} - \eta_\mathrm{tt} |\boldsymbol{T}_\mathrm{t}| \,\mathrm{sgn}(\boldsymbol{\omega}_\mathrm{t}). \tag{10}$$

■指数形減衰（オプション） エネルギー散逸モデルを用いる場合，ばね力・トルクは

$$\boldsymbol{F}^{n+1} = (1-\eta\Delta t)\,\boldsymbol{F}^{n}, \qquad \boldsymbol{T}^{n+1} = (1-\eta\Delta t)\,\boldsymbol{T}^{n}, \tag{11}$$

により時間とともに指数的に減衰し，散逸エネルギー $E_{\mathrm{d}}(t) = \int \eta\,\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}t + \int \eta\,\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}t$ が算定される．

■粒子に作用する合力・合トルク

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{n},d} + \boldsymbol{F}_{\mathrm{t},d}, \qquad \boldsymbol{T}_i = r_{ci}\,\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{F}_{\mathrm{t},d} + \boldsymbol{T}_{\mathrm{n},d} + \boldsymbol{T}_{\mathrm{t},d}, \quad \boldsymbol{T}_j = -\boldsymbol{T}_i, \tag{12}$$

ただし $r_{ci} = r\,R_i/(R_i + R_j)$.

■破壊判定

$$\sigma = \frac{|\boldsymbol{F}_{\mathrm{n}}|}{A} + \frac{|\boldsymbol{T}_{\mathrm{t}}|\,r_b}{I}, \qquad \tau = \frac{|\boldsymbol{F}_{\mathrm{t}}|}{A} + \frac{|\boldsymbol{T}_{\mathrm{n}}|\,r_b}{J}, \tag{13}$$

$$\sigma \geq \sigma_{\max}, \quad \tau \geq \tau_{\max} \quad \text{または} \quad r \geq r_{\max} \tag{14}$$

でボンドは破壊する．オプションとして (i) 引張／圧縮強度比 γ による $\sigma_{\max}$ の補正，(ii) ドルッカー–プラガー基準 $\tau_{\max} \to \tau_{\max} + (\sigma/A)\tan\phi$ を適用できる．

■備考 破壊判定に達した場合，全ばね力・トルク・蓄積弾性エネルギーを即座に 0 とし，散逸エネルギーへ変換する．ボンド生成は常時距離判定または指定時刻判定を選択でき，確率的生成も可能である．