

# 剛体回転エネルギーの数式解説 (compute\_erotate\_rigid.cpp)

Open DEM Japan

2025年6月30日

離散要素法における剛体 (*rigid body*) は、複数粒子を「質量中心の並進運動」と「剛体としての回転運動」に分離して記述できる。ここでは剛体の**回転エネルギー**  $E_{\text{rot}}$  を導出し、compute\_erotate\_rigid.cpp が計算する量を数学的に説明する。

剛体  $g$  を構成する粒子を  $k = 1, \dots, N_g$  とし、粒子質量を  $m_{gk}$ 、剛体質量を  $M_g = \sum_k m_{gk}$  とする。質量中心位置を  $\mathbf{R}_g$ 、質量中心系での粒子位置を  $\mathbf{r}_{gk} = \mathbf{x}_{gk} - \mathbf{R}_g$  とおく。剛体の角速度を  $\boldsymbol{\omega}_g$  とすると、粒子  $k$  の速度は  $\mathbf{v}_{gk} = \mathbf{V}_g + \boldsymbol{\omega}_g \times \mathbf{r}_{gk}$  であり、ここで  $\mathbf{V}_g$  は質量中心の並進速度である。回転成分だけを取り出した運動エネルギーは

$$E_{\text{rot},g} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_g} m_{gk} |\boldsymbol{\omega}_g \times \mathbf{r}_{gk}|^2 \quad (1)$$

■慣性テンソルによる表現 外積の恒等式  $|\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}|^2 = \boldsymbol{\omega}^T [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\mathbf{I} - \mathbf{r}\mathbf{r}^T] \boldsymbol{\omega}$  を用いると、(??) は慣性テンソル

$$\mathbf{I}_g = \sum_{k=1}^{N_g} m_{gk} [(\mathbf{r}_{gk} \cdot \mathbf{r}_{gk})\mathbf{I} - \mathbf{r}_{gk}\mathbf{r}_{gk}^T] \quad (2)$$

を導入して

$$E_{\text{rot},g} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_g^T \mathbf{I}_g \boldsymbol{\omega}_g \quad (3)$$

と書ける。

■本体座標系 実装では各剛体に**本体座標系** (慣性テンソルが対角化される固有主軸系) を割り当てる。本体系の慣性テンソルを  $\mathbf{I}_g^{\text{B}} = \text{diag}(I_{g1}, I_{g2}, I_{g3})$  とし、ワールド座標系への回転行列を  $\mathbf{R}_g \in \text{SO}(3)$  (四元数  $\mathbf{q}_g$  から計算) で表せば

$$\mathbf{I}_g = \mathbf{R}_g \mathbf{I}_g^{\text{B}} \mathbf{R}_g^T \quad (4)$$

である。したがって (??) は

$$E_{\text{rot},g} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_g^T \mathbf{R}_g \mathbf{I}_g^{\text{B}} \mathbf{R}_g^T \boldsymbol{\omega}_g \quad (5)$$

となる。

■球対称剛体 もし  $I_{g1} = I_{g2} = I_{g3} = I_g$  なら  $\mathbf{I}_g = I_g \mathbf{I}$  であり, (??) は

$$E_{\text{rot},g} = \frac{1}{2} I_g \|\boldsymbol{\omega}_g\|^2 \quad (6)$$

に簡略化される.

■総回転エネルギー シミュレーションに存在する剛体群を  $g = 1, \dots, N_{\text{grp}}$  とすると,

$$E_{\text{rot}} = \sum_{g=1}^{N_{\text{grp}}} E_{\text{rot},g} \quad (7)$$

が `compute_erotate_rigid.cpp` において `FixRigid` または `FixRigidSmall` から取得・報告されるスカラー量である.

#### ■実装との対応

- 式 (??) - (??) が物理量としての回転エネルギーを定義する.
- `fix_rigid / rigid/small` は各剛体について  $\boldsymbol{\omega}_g$  と  $\mathbf{I}_g^{\text{B}}$  を計算し, (??) あるいは (??) を用いて  $E_{\text{rot},g}$  を求める.
- `compute_erotate_rigid` はそれらを集約して (??) を返すだけである.

以上により, ソースコードが報告する「剛体グループ全体の回転エネルギー」は古典力学で定義される慣性テンソルと角速度に基づく純粋な運動エネルギーであることが確認できる.