”クロスセクション計算モデル” の数式解説（”compute_crosssection.cpp”. 拡張子）

Open DEM Japan

2025 年 6 月 30 日

粒子集合を任意軸に沿って薄くスライスし，各スライスで粒子円板の凸包面積を評価することにより断面積を算出し，さらにその面積半径の軸方向変化から自由表面の傾斜角を推定するアルゴリズムを数式で示す．

軸を $d \in \{x, y, z\}$，対応する座標を s とし，観測区間を

$$s \in [s_{\min},\, s_{\max}]$$

とする．この区間を $N = n_{\mathrm{cut}}$ 枚の切断面で等間隔に分割し

$$s_k = s_{\min} + k\,\Delta s, \qquad \Delta s = \frac{s_{\max} - s_{\min}}{N-1}, \qquad k = 0, \ldots, N-1 \tag{1}$$

と定義する．切断面の半厚さを δ とすると，粒子 i がスライス k に寄与する条件は

$$|s_i - s_k| < \delta, \qquad s_i := \boldsymbol{e}_d \cdot \boldsymbol{x}_i, \tag{2}$$

であり，ここで $\boldsymbol{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$ は粒子中心位置，$\boldsymbol{e}_d$ は軸 d の単位ベクトルである．粒子に対応するスライス番号は近似的に

$$k = \mathrm{round}\Bigl(\frac{s_i - s_{\min}}{\Delta s}\Bigr) \tag{3}$$

で与える．

条件 (2) を満たす粒子を平面 $s = s_k$ 上に射影し，半径 a_i の円板

$$\mathcal{C}_{ik} = \bigl\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid (u - u_i)^2 + (v - v_i)^2 \le a_i^2\bigr\}$$

を置く．ここで (u_i, v_i) は軸 d と直交する 2 成分である．スライス k の断面領域は円板の集合和

$$\Omega_k = \bigcup_{i \in \mathcal{P}_k} \mathcal{C}_{ik}, \tag{4}$$

$$\mathcal{P}_k := \{i \mid \text{粒子 } i \text{ が (2) を満たす}\}$$

であり，その面積

$$A_k = \mathrm{meas}_2(\Omega_k) \tag{5}$$

を Modified Andrew 法により数値評価する．

面積から等価半径

$$r_k = \sqrt{\frac{A_k}{\pi}} \tag{6}$$

を導入する．$A_k < \varepsilon\,(=\delta^2 \times 10^{-12})$ の場合は空スライスとみなす．

非零スライスの最初と最後のインデックスを

$$i_{\mathrm{lo}} = \min\{k \mid r_k > 0\}, \qquad i_{\mathrm{hi}} = \max\{k \mid r_k > 0\}$$

とし，中心とオフセットを

$$i_{\mathrm{mid}} = \left\lfloor \tfrac{1}{2}(i_{\mathrm{lo}} + i_{\mathrm{hi}}) \right\rfloor, \qquad \Delta i = \left\lfloor \tfrac{1}{4}(i_{\mathrm{hi}} - i_{\mathrm{lo}}) \right\rfloor \tag{7}$$

で与える．これより

$$i_{\mathrm{lo\text{–}mid}} = i_{\mathrm{mid}} - \Delta i, \qquad i_{\mathrm{hi\text{–}mid}} = i_{\mathrm{mid}} + \Delta i \tag{8}$$

$$r_{\mathrm{lo\text{–}mid}} = r_{i_{\mathrm{lo\text{–}mid}}}, \qquad r_{\mathrm{hi\text{–}mid}} = r_{i_{\mathrm{hi\text{–}mid}}} \tag{9}$$

となる．軸方向距離と半径差

$$\Delta s_{\mathrm{ax}} = (i_{\mathrm{hi\text{–}mid}} - i_{\mathrm{lo\text{–}mid}})\,\Delta s, \qquad \Delta r = r_{\mathrm{hi\text{–}mid}} - r_{\mathrm{lo\text{–}mid}} \tag{10}$$

を用いて自由表面の傾斜角 θ（単位：度）は

$$\theta = \begin{cases} 90^\circ + \dfrac{180^\circ}{\pi}\arctan\!\Big(\dfrac{\Delta r}{\Delta s_{\mathrm{ax}}}\Big), & \Delta r > 0, \\ \dfrac{180^\circ}{\pi}\arctan\!\Big(\dfrac{\Delta s_{\mathrm{ax}}}{-\Delta r}\Big), & \Delta r \le 0. \end{cases} \tag{11}$$

最終的に (s_k, A_k, r_k) を各スライスについて出力し，続けて θ を書き込むことで，断面積分布と自由表面角度が得られる．