毛管力ボンドモデルの数式解説
(cohesion_model_capillary.h)

Open DEM Japan

2025 年 6 月 29 日

二球状粒子 i，j（半径 R_i, R_j，中心間距離 r）間に液架橋が形成されるとき，幾何量を

$$R_{\mathrm{m}} = \max(R_i, R_j), \qquad d = r - (R_i + R_j), \qquad \delta = \frac{d}{R_{\mathrm{m}}} \tag{1}$$

と定義する（$\delta > 0$ は離間，$\delta < 0$ は重なり）．各粒子内部の液体体積は体積比 V_ℓ から

$$V_i = \frac{4\pi}{3} R_i^3 V_\ell, \qquad V_j = \frac{4\pi}{3} R_j^3 V_\ell, \tag{2}$$

液架橋全体の体積は

$$V_{\mathrm{b}} = V_i + V_j, \qquad \ell = \frac{V_{\mathrm{b}}}{R_{\mathrm{m}}^3} \tag{3}$$

で与えられる（無次元橋長 ℓ）．橋が存在し得る最大離間は体積保存から

$$d_{\max} = R_{\mathrm{m}}\, \ell^{1/3}. \tag{4}$$

以降，表面張力を γ とする．

■ミカミモデル（Mikami 1998）

$$\begin{aligned} A(\ell) &= -1.1\, \ell^{-0.53}, \\ B(\ell) &= -0.0082 \ln \ell + 0.48, \\ C(\ell) &= \ \ 0.0018 \ln \ell + 0.078, \end{aligned} \tag{5}$$

を用い，毛管力は

$$F_{\mathrm{cap}} = -\pi\gamma\sqrt{R_i R_j} \begin{cases} \exp\bigl(A\delta + B\bigr) + C & (\delta > 0), \\ \exp(B) + C & (\delta \le 0). \end{cases} \tag{6}$$

■ウィレットモデル（Willett 2000） $\tilde{\ell} = 2.3 \ln \ell$ とすると

$$\begin{aligned} f_1(\ell) &= -0.44507 - 0.1119\, \tilde{\ell} - 0.012101\, \tilde{\ell}^2 - 0.000500\, \tilde{\ell}^3, \\ f_2(\ell) &= \ \ 1.9222 - 0.0668\, \tilde{\ell} - 0.0013375\, \tilde{\ell}^2, \\ f_3(\ell) &= \ \ 1.268 + 0.1980\, \tilde{\ell} + 0.022320\, \tilde{\ell}^2 + 0.0008585\, \tilde{\ell}^3, \\ f_4(\ell) &= -0.010703 + 0.03345\, \tilde{\ell} + 0.0018574\, \tilde{\ell}^2, \end{aligned} \tag{7}$$

さらに $\tilde{\delta} = 2.3 \ln(0.5\delta)$ を用いて

$$F_{\mathrm{cap}} = -2\pi\gamma\sqrt{R_i R_j} \begin{cases} \exp\Bigl(f_1 - f_2 \exp\bigl(f_3 \tilde{\delta} + f_4 \tilde{\delta}^2\bigr)\Bigr) & (\delta > 0), \\ \exp(f_1) & (\delta \le 0). \end{cases} \tag{8}$$

■力の作用　法線単位ベクトル $\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_j)/r$ を介し，粒子に及ぼす力は

$$\boldsymbol{F}_i = -\boldsymbol{F}_j = F_{\mathrm{cap}}\,\boldsymbol{n}. \tag{9}$$

トルクは液架橋が中心線上に作用するため 0 とみなす．

■橋の存否判定　接触後に橋が形成された履歴フラグが立ち，かつ $0 \le d < d_{\max}$ を満たす間だけ (6) または (8) を適用し，範囲外では $F_{\mathrm{cap}} = 0$ として橋を消滅させる．

■まとめ　本キャピラリーモデルは液体量比 V_ℓ と表面張力 γ を入力とし，(1) ミカミ近似：簡潔な指数・対数式，(2) ウィレット近似：より広い ℓ 範囲を高精度に再現の二通りを選択できる．どちらも粒子径の幾何平均 $\sqrt{R_i R_j}$ をスケール長とし，橋長 ℓ と無次元間隙 δ に基づいて毛管吸引力を評価する．